

303 静的な制約条件をもつ三次元板・シェル構造の振動特性最適化 Optimal Design for Vibration Characteristics of 3D Plate/Shell with Static Constraint Conditions

○ 正 趙 希祿 (富士テクニカルリサーチ) 中村 和彦 (富士テクニカルリサーチ)
遠藤 正司 (富士テクニカルリサーチ) 名取 孝 (富士テクニカルリサーチ)

Xilu ZHAO, Fuji Technical Research Inc.
Kazuhiko NAKAMURA, Fuji Technical Research Inc.
Masashi ENDOU, Fuji Technical Research Inc.
Takashi NATORI, Fuji Technical Research Inc.

This paper deals with the optimization problem of 3-dimensional plate and shell structure, it makes some vibration eigenvalues into the object function for an optimum design, and it imposes constraint conditions, such as static displacements and stresses; as dynamic frequencies. Moreover, it proposes the SQP algorithm to searching for the optimum structure by adjusting geometric shape and plate thickness, and it verified the validity of this approach in the numerical example results.

Key Words: Optimal Design, Vibration Characteristic Optimization, Static Constraint Condition
Basis Vector Method, Shape Optimization, Structural Design, Plate and Shell Structure

1. はしがき

薄肉の板・シェル構造を設計する際に、静的な特性と動的な特性を同時に考える可能性がある。即ち、静的な制約条件を満足したうえで、より良い振動特性を追求するか、あるいは動的な制約条件を満足したうえで、より良い静特性を追求するかである。いずれにしても、異なる性質のもつ構造応答特性を両方考える必要がある。

最近、板・シェル構造の最適設計に関する研究は非常に進んでいる。構造最適化は、FEM 構造解析と最適化手法を組合せ、設計上の諸条件を考慮した最適な構造をコンピュータ数値計算で得ることができる。従来、設計者の経験や勘をもとに行ってきた設計改良の繰返し作業をコンピュータで計算することによって実施し、設計品質の向上と設計期間の短縮および設計コストの削減が実現できる。

しかし、設計現場の立場からみると、構造最適化の応用はまだ十分に行われておらず、多数の研究成果は研究室あるいは研究論文のレベルで止まっており、設計者が理解し簡単に使える専用ソフトは極めて少ないのが現状である。^[1]

本報告では、様々の設計分野によく見られている三次元板・シェル構造の静動特性の最適化問題を取扱い、設計変数は板厚と構造の形状変更を表すベシスベクトル係数とする。事前に外力の周波数分布が分かることを前提とし、入力振動数と計算された構造の固有振動数の差を最小化することを最適化の目的とする。制約条件は構造重量、静的な変位と応力、動的な固有振動数を含める。最適化手法は逐次2次計画法(SQP)を用い、感度解析には剛性行列と質量行列の差分に基づく直接微分法を適用する。

数値計算例として、箱型の三次元板組立て構造の最適化問題を扱い、構造を構成した板の板厚と構造形状をコントロールするベシスベクトル係数を設計変数として調整することによって最適な構造を求めた。

2. 問題の設定

本報告で扱った構造最適化問題は、下記のように定式化される。

$$\begin{aligned} \text{Find} \quad & x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \\ \text{Minimize} \quad & W = f(x) = \sqrt{\sum_i (\Omega_i - [\Omega_i])^2} \quad \dots (1) \\ \text{Subject to} \quad & x_{li} \leq x_i \leq x_{ui} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ & u_{j1} \leq [u_{j1}] \quad j1 = 1, 2, \dots, m1 \\ & \delta_{j2} \leq [\delta_{j2}] \quad j2 = 1, 2, \dots, m2 \\ & \sigma_{j3} \leq [\sigma_{j3}] \quad j3 = 1, 2, \dots, m3 \\ & \Delta\sigma_{j4} \leq [\Delta\sigma_{j4}] \quad j4 = 1, 2, \dots, m4 \\ & \Omega_{j5} \leq [\Omega_{j5}] \quad j5 = 1, 2, \dots, m5 \\ & \Omega_{j6} \geq [\Omega_{j6}] \quad j6 = 1, 2, \dots, m6 \end{aligned}$$

ここでは、設計変数の $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ は、板厚と節点座標グループで表す形状変更パターンのベシスベクトル係数とする。目的関数の $W = f(x)$ は幾つかの固有振動数 Ω_i と入力振動数 $[\Omega_i]$ の差を最小化する。側面制約条件の $x_{li} \leq x_i \leq x_{ui}$ は、設計変数 x_i の両側にそれぞれ下限値 x_{li} と上限値 x_{ui} を課す。性能制約条件は6種類を含め、 $u_{j1} \leq [u_{j1}]$ は節点変位、 $\delta_{j2} \leq [\delta_{j2}]$ は撓み（節点変位差）、

$\sigma_{j3} \leq [\sigma_{j3}]$ は要素応力、 $\Delta\sigma_{j4} \leq [\Delta\sigma_{j4}]$ は要素応力差、

$\Omega_{j5} \leq [\Omega_{j5}]$ と $\Omega_{j6} \geq [\Omega_{j6}]$ は構造固有振動数の下限値と上

限値の制約条件である。

式 (1) の最適化問題は、静的な制約条件と動的な制約条件を同時に含める。計算上の便宜のため、各制約条件をまとめて、式 (1) を下記のように表す。

$$\text{Find } x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$\text{Minimize } W = f(x) = \sqrt{\sum_i (\Omega_i - [\Omega_i])^2} \quad \dots (2)$$

$$\text{Subject to } x_{li} \leq x_i \leq x_{ui} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$g_j(x) \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, m$$

ここで、制約条件の数は $m = m1 + m2 + \dots + m6$ である。

式 (2) の問題を解くため、本報告は逐次 2 次計画法を適用し、形状変更を表す設計変数を扱うにはベシスベクトル法^[2]を利用した

三、感度解析法

3-1. 変位感度

構造平衡方程式は

$$[K]\{u\} = \{P\} \quad \dots (3)$$

と表される。式 (3) の両側に設計変数 x_i で微分し、整理すると

$$[K] \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{u\} \quad \dots (4)$$

になる。ここで、設計変数 x_i に関する擬似荷重を

$$\{P_i\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x_i} \right\} - \left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] \{u\} \quad \dots (5)$$

とする。設計変数 x_i に関する要素剛性行列の微分の和を

$$\left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] = \sum_e \left[\frac{\partial K^e}{\partial x_i} \right] \quad \dots (6)$$

に表される。したがって、変位感度の計算流れは次のようにまとめられる。

- (1) LDLT 分解法を用い、構造平衡方程式 (3) を解き、変位を得る。
- (2) LDLT 分解した剛性行列を保存する。
- (3) 差分法を用い、設計変数に関する要素剛性行列の微分を計算する
- (4) 設計変数に関する擬似荷重 (5) を計算する。
- (5) LDLT 分解した剛性行列を使い、方程式 (4) を解き、変位感度を得る。

3-2. 応力感度

通常、Misses 応力を制約条件とする。また、変位感度より応力感度を計算するには、たいいてい精度損失が比較的少ない

と考えられ、便宜のため差分法を適用する。式

$$\frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} = \frac{\sigma_j(x + \Delta x_i, u + \Delta u) - \sigma_j(x, u)}{\Delta x_i} \quad \dots (7)$$

で応力感度を計算する。

3-3. 固有振動数感度

第 j 次固有振動に関する固有値方程式は

$$([K] - \omega_j^2 [M])\{\phi_j\} = 0 \quad \dots (8)$$

と表され、両方 x_i で微分し、さらに整理すると

$$\frac{\partial \omega_j^2}{\partial x_i} \{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\} = \{\phi_j\}^T \left(\left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] - \omega_j^2 \left[\frac{\partial M}{\partial x_i} \right] \right) \{\phi_j\} \quad \dots (9)$$

が得られる。

固有ベクトル $\{\phi_j\}$ が正規化される場合、その単位直交性

$$\{\phi_j\}^T [M] \{\phi_j\} = 1$$

を利用し、式 (9) を

$$\frac{\partial \omega_j^2}{\partial x_i} = \{\phi_j\}^T \left(\left[\frac{\partial K}{\partial x_i} \right] - \omega_j^2 \left[\frac{\partial M}{\partial x_i} \right] \right) \{\phi_j\} \quad \dots (10)$$

に表される。

したがって、固有値感度を計算する流れは次のようにまとめられる。

- (1) 通常の固有値解析をし、固有値を得る。
- (2) 設計変数に関する剛性行列の微分を計算する。
- (3) 設計変数に関する質量行列の微分を計算する。
- (4) 固有値感度 (10) を計算する。

四、形状最適化手法

形状の変更を表現するには直接に節点座標を設計変数する方法はよく使われている。しかし、それを実際の構造最適化問題に応用する際に、変数のグルーピングや解析メッシュのリメッシングなどの問題があるため、なかなか使いにくく応用するには難しい傾向が見られる。

本報告の形状最適化問題には、ベシスベクトル法を適用した。ベシスベクトル法は一つの設計変数で複数の節点を同時にコントロールできるところに特長がある。

まず、解析モデルの形状変更部分の節点座標をまとめて、一つのベクトルで表すと

$$\alpha = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_v, y_v, z_v]^T \quad \dots (11)$$

となる。幾つかの形状変更の可能なパターンに分けて、式 (11) のようなベクトル、いわゆるベシスベクトル α_1 、 α_2 、 $\dots$ 、 α_v を作成する。この v 個のベクトルは v 次元線形空間の一组基底ベクトルとなる。

次に、ベシスベクトルを使い、設計変数が変化したときの新しい形状の節点座標ベクトル α は

$$\alpha = \alpha_0 + X_1(\alpha_1 - \alpha_0) + X_2(\alpha_2 - \alpha_0) + \dots + X_v(\alpha_v - \alpha_0) \quad \dots (12)$$

で与えられる。ここでは、 α_0 はオリジナル形状の座標ベクトル、 α_1 、 α_2 、..... α_v は各形状変更パターンに対応する座標で表す定数ベクトルである。 X_1 、 X_2 、.....、 X_v は形状をコントロールする設計変数で、これらの設計変数は連続変数であるので、式（12）で計算して形成される形状の数は無限にあることが考えられる。

五、数値計算例

図 1 に示す三次元箱型板組立て構造に対して最適設計を行う。構造は各部分ごとに 13 枚の板から構成され、板厚の分布は図 3 を参照する。構造の下端を拘束する。

ここでは、構造最適化の目的は、最低次の固有振動数をなるべく 16.0Hz に近づけるような周波数を与える構造を求める。

静的な荷重は図 1 に示すように上コーナで対向の平行荷重 P と $2P$ がかかり、静的制約条件として

- 荷重点 A の荷重方向の撓み $\leq 0.15\text{mm}$
- 荷重点 A と C の荷重方向の相対変位 $\leq 0.05\text{mm}$
- 節点 A と B の縦方向の相対変位 $\leq 0.05\text{mm}$
- 荷重点 A 周辺の Mises 応力 $\leq 15.0\text{kg/mm}^2$

とする。一方、動的な制約条件として、2 次振動数を 25.0～30.0Hz の範囲以内にセットし、また、周波数 34.0Hz と 44.0Hz の周期外力を受ける可能性があると考え

- $25.0\text{Hz} \leq 2 \text{ 次固有振動数} \leq 30.0\text{Hz}$
- 3 次固有振動数 $\leq 32.0 \text{ Hz}$
- 4 次固有振動数 $\geq 36.0 \text{ Hz}$
- 5 次固有振動数 $\leq 42.0 \text{ Hz}$
- 6 次固有振動数 $\geq 46.0 \text{ Hz}$

とする。また、構造全体の重量 $\leq 2.0\text{kg}$ の制約条件を付加した。

最適化の設計変数は、13 枚の板の厚さと図 2 に示した 6 つのベシスベクトルの重み係数とし、さらにこの 19 個の設計変数に対して、それぞれ下限値と上限値の側面制約条件を考慮する。

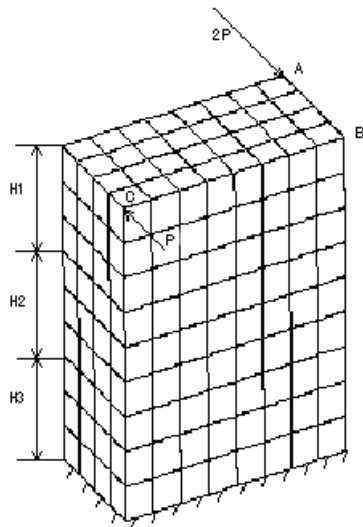


Fig.1 Load and constraints on the original structure

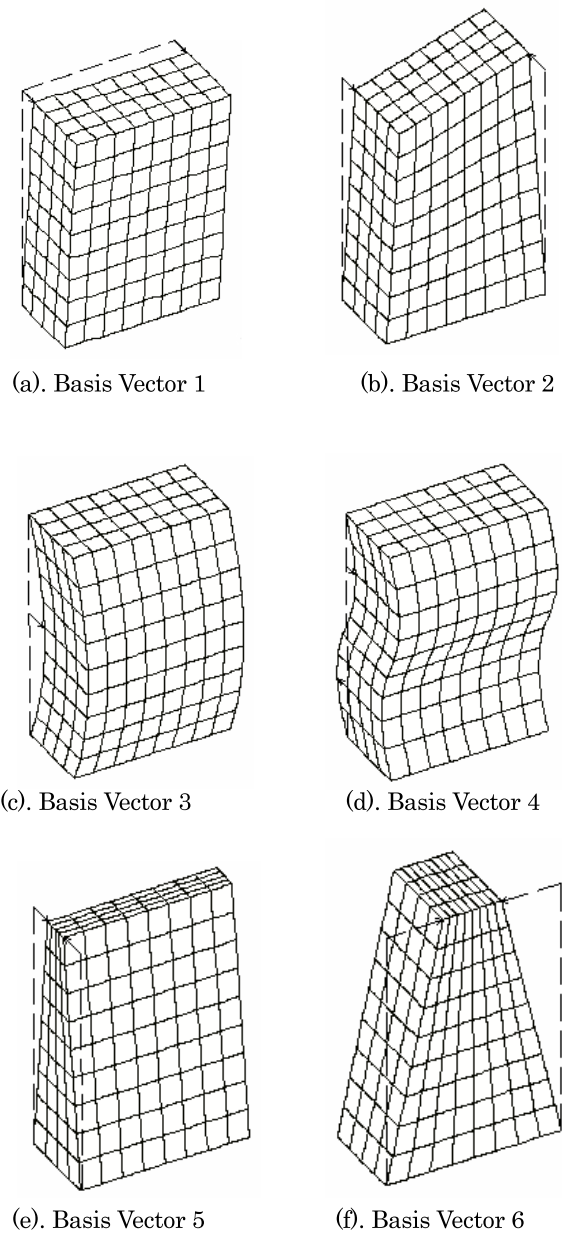


Fig.2 Basis Vector 1～6

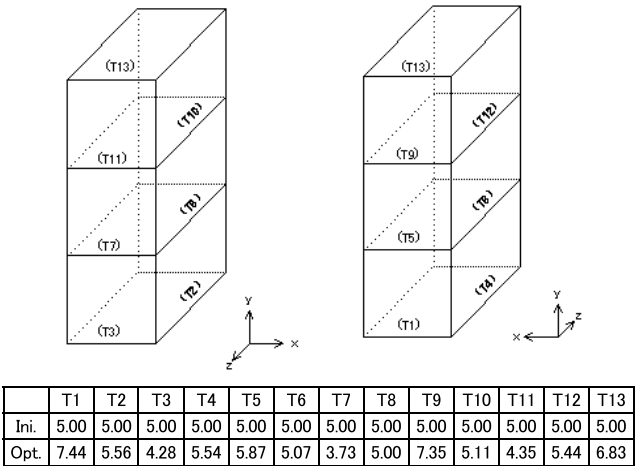


Fig.3 Thickness of each Plate

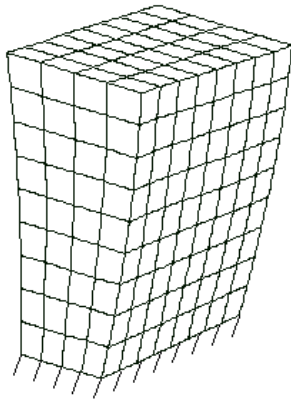


Fig.4 Optimized Structure Shape

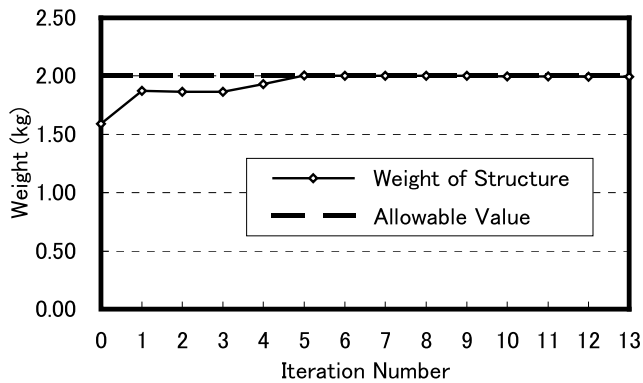


Fig.5 Change of Weight of Structure

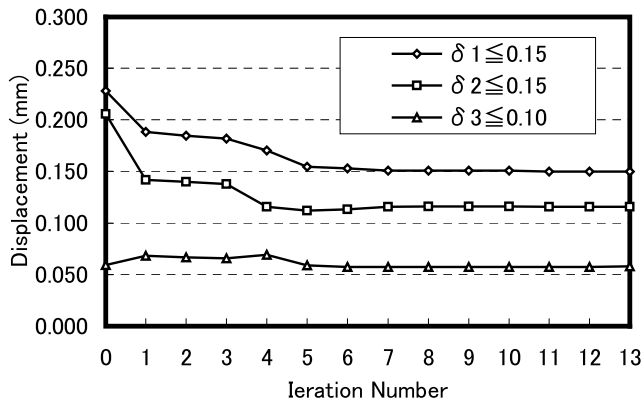


Fig.6 Change of Constrained Displacements

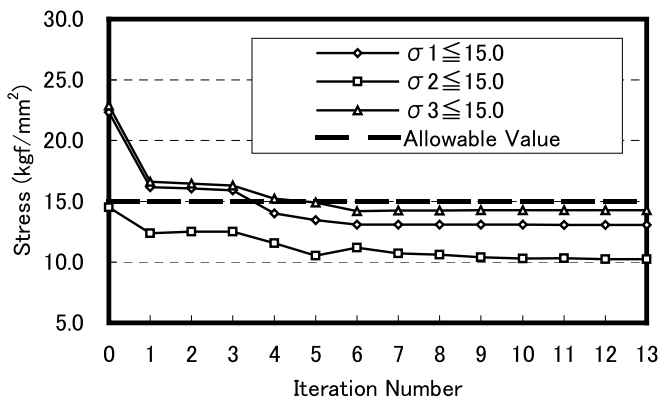


Fig.7 Change of Constrained Stresses

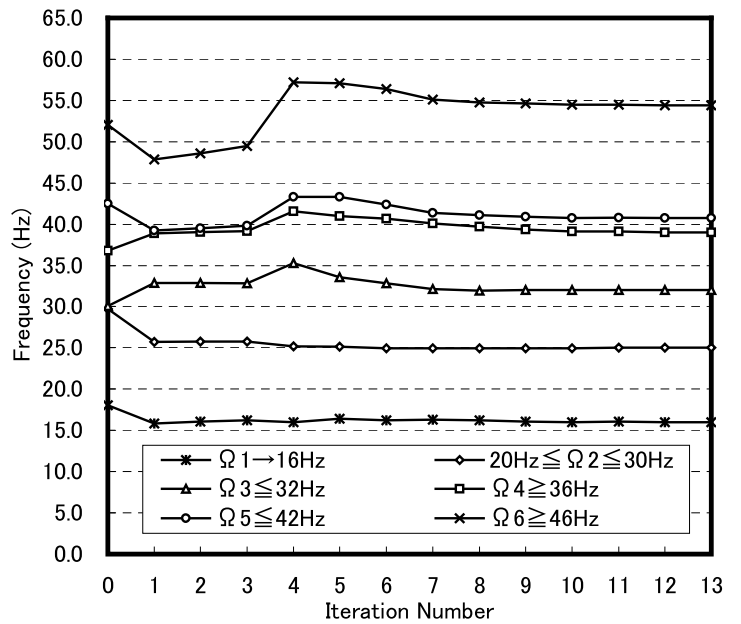


Fig.8 Change of Frequencies

以上の設定した最適化条件に基づき、パソコン(PentiumII 450Hz)上で、逐次2次計画法を用い最適化計算を行った。すべての計算は19回の構造解析と13回の感度解析を経て、58分で収束し最適解を得た。

最適化の目的値にする1次振動数が理想値16.0Hzと5桁まで一致した周波数を与える構造の形状を図4に示し、最適化前後における板厚分布を図3に、構造重量および各制約条件の変化をそれぞれ図5～図8に示す。

図中により、初期構造での制約条件が許容値を超過している変位、応力と固有振動数があり、すなわち初期構造が設計要求を満足せず、構造の形状と板厚を適当に調整する必要がある。一方、最適構造での制約条件はすべて許容範囲以内に収まり、また、構造の重量、変位、応力及び固有振動数がそれぞれ対応する許容値に到達し、さらに構造を変更する必要がないことが分かった。

六、まとめ

三次元板・シェル組立て構造に対して、静的な変形や応力などの制約条件と、動的な固有振動数の制約条件を同時に考慮した上で振動特性の最適化問題を解く手法を検討した。その結果より、静的な制約条件をもつ振動特性の最適化の安定性を確認した。また、この種の構造形状と板厚を同時に変化する構造最適化問題に、ベースベクトル法を用いて形状変更を実現することが適当であることを明らかにした。

参考文献

1. 日本機械学会編、構造・材料の最適化設計、技報堂、1989
2. 萩原、最適化手法の動向とこれからの方向について、振動騒音の最適化、自動車技術会・振動騒音の最適化ワーキンググループ、1998、p381-388